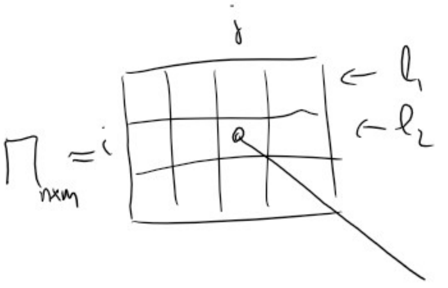
Cours 12.04.2021 - Après-midi
lundi, 12 avril 2021 13:02

EXAMEN JEUDI 29.04.2021
Lundi 26.04.2021 => réponse aux questions
(moyenne semestre 0.5*(NoteEE + NoteTP*)
* la forme reste à déterminer!

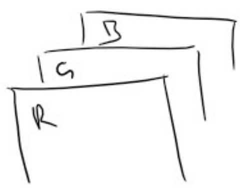
Calcul Matriciel :
Une matrice est un TABLEAU à 2 dimensions contenant
des NOMBRES (variables).



$$m_{ij} = M[i][j] \begin{cases} i^e \text{ ligne} & i=1,\dots,n \\ j^e \text{ colonne} & j=1,\dots,m \end{cases}$$

$M_{n\times m}$ a n lignes et m colonnes

$$M_{n\times m} = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & \cdots & m_{1m} \\ m_{21} & m_{22} & & \vdots \\ m_{31} & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ m_{n1} & \cdots & \cdots & m_{nm} \end{pmatrix}$$



Cas particuliers : qu'est-ce qu'un vecteur ? $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}_{n\times 1} = X_{n\times 1}$$

Un vecteur n'est rien d'autre qu'une matrice avec 1 seule
colonne !

Quid d'un scalaire ??

$c \in \mathbb{R}$ $\qquad c = C_{1\times 1}$ $\qquad$ C'est aussi une matrice 1x1 !

Scalaire
↓
a·h

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{Scalaire}}}{a} \cdot b \quad \text{a matrice } 1\times1 \qquad 1\times1$$

Multiplication par un scalaire (vecteurs)

$$\underset{\text{scalaire}}{\lambda} \cdot \underset{\substack{\text{matrice} \\ n\times1}}{\vec{x}} = \begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \lambda x_2 \\ \vdots \\ \lambda x_n \end{pmatrix}$$

C'est un cas particulier de la multiplication MATRICIELLE par un scalaire !

$$\lambda \cdot A_{n\times m} = \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \cdots & \lambda a_{1m} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda a_{n1} & \cdots & \cdots & \lambda a_{nm} \end{pmatrix}$$

Multiplication d'une matrice par scalaire :

$$\cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R}_{n\times m} \longmapsto \mathbb{R}_{n\times m}$$

$$\lambda \times A_{n\times m} \Rightarrow a_{ij} \longrightarrow \lambda a_{ij} \quad \begin{matrix} i = 1, \dots, n \\ j = 1, \dots, m \end{matrix}$$

On peut prouver que les différents opérateurs fonctionnent également sur les MATRICES et que leurs propriétés sont préservées :
P.ex. La multiplication par un scalaire est DITRIBUTIVE par rapport à **<u>l'addition de 2 matrices</u>** !

<u>Addition matricielle :</u> $\vec{x} + \vec{y} = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \\ \vdots \end{pmatrix}$

⚠ DIMENSIONS

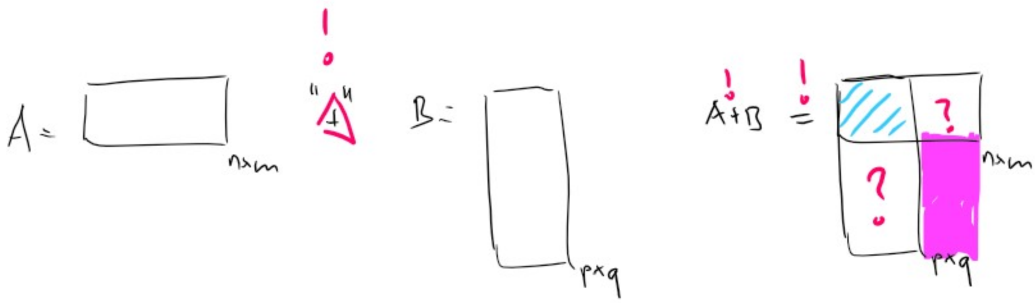
$$A_{n\times m} + B_{n\times m} = C_{n\times m} = \begin{pmatrix} \overset{c_{11}}{\boxed{a_{11}+b_{11}}} & \overset{c_{12}}{\boxed{a_{12}+b_{12}}} & \cdots \\ \overset{c_{21}}{\boxed{a_{21}+b_{21}}} & \cdots & \\ \vdots & & \ddots \end{pmatrix}$$

$$A_{n\times m} + B_{n\times m} = C_{n\times m} = \begin{pmatrix} \boxed{a_{11}+b_{11}} & \cdots & \cdots \\ \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \end{pmatrix}$$

$$\boxed{c_{ij} = a_{ij} + b_{ij} \qquad \begin{array}{l} i = 1, \dots, n \\ j = 1, \dots, m \end{array}}$$

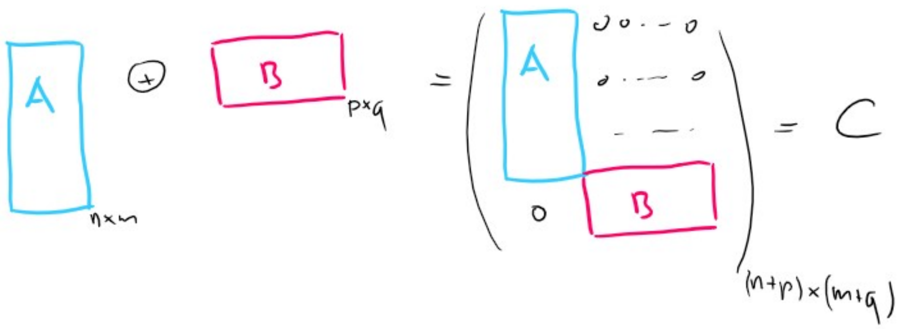
CPU : 2 boucles

⚠ Dimensions

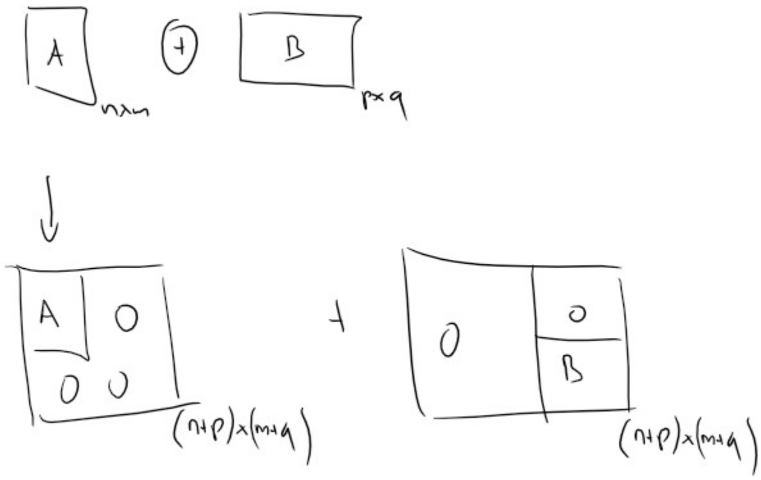


Somme DIRECTE ⊕

$$A_{n\times m} \oplus B_{p\times q} = C_{(n+p)\times(m+q)}$$



$$C_{ij} = \begin{cases} a_{ij} & \text{si } i=1,\dots,n \quad j=1,\dots,m \\ b_{ij} & \text{si } i=n+1,\dots,n+p \quad j=m+1,\dots,m+q \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$



Produit Matriciel :

$$\times : \mathbb{R}_{n\times \underline{m}} \times \mathbb{R}_{\underline{m}\times p} \longmapsto \mathbb{R}_{n\times p}$$

$$A_{n\times m} \times B_{\underline{m}\times p} = C_{\underline{n}\times p}$$

$$A_{3\times5} \times B_{5\times2} = C_{3\times2} \quad (\text{cf exple})$$

$B_{5\times\boxed{2} \times A_{3}\times5}$ MARCHE PAS !!

La multiplication matricielle est-elle COMMUTATIVE, expliquez pourquoi ?
Oui/$\boxed{\text{non}}$ => 1 point
Pourquoi => 9 pts cf contre-exemple ! $A_{2\times5}\times B_{5\times2}$ ok

$B_{5\times 2} \times A_{3\times 5}$ PAS défini !

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}_{3\times 2} \times \begin{pmatrix} 6 & 5 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}_{2\times 3} = \begin{pmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix}_{3\times 3}$$

$$\begin{pmatrix} 6 & 5 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}_{2\times 3} \times \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}_{3\times 2} = \begin{pmatrix} & \\ & \end{pmatrix}_{2\times 2}$$

|| ? NON !!

$$\begin{pmatrix} \ \end{pmatrix}_{2\times 2} \times \begin{pmatrix} \ \end{pmatrix}_{2\times 2}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 6 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 & 19 \\ 36 & 43 \end{pmatrix}_{\boxed{2\times 2}}$$

PAS COMMUTATIF

$$\neq$$

$$\begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 6 & 7 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 19 & 28 \\ 27 & 40 \end{pmatrix}_{\boxed{2\times 2}}$$

Transposée :

$$B^T \Rightarrow (b_{ij})^T = b_{ji}$$